МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

Е.Л. Панкратов

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и
предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся
по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: Кратные интегралы. Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. - 31 с.

Рецензент: **к.ф.-м.н., доцент Т.В. Лухманова**.
.

Учебно-методическое пособие «Кратные интегралы» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с соответствующим разделом (Математический анализ) курса «Математика». Оно содержит основные понятия о двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралах. Обсуждаются различные приложения рассматриваемых интегралов. Для закрепления теоретических знаний по функциям многих переменных в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Часто для описания реальных физических, биологических процессов (например, пространственно-временного распределения температуры) одной переменной не достаточно. Обобщением функции одной переменной является функция нескольких переменных. Одной из операций над функциями нескольких переменных является интегрирование. Интегрирование позволяет вычислять площади поверхностей тел, длины отрезков кривой.

В данном пособии изложены основные понятия двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов. Для закрепления теоретических знаний по двойным, тройным, криволинейным и поверхностным интегралам в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела «Математический анализ» курса «Математика» студенты должны уметь вычислять двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы, а также уметь использовать их в различных приложениях.

Раздел 1. Двойные интегралы

Определение 1

Пусть S - ограниченная область плоскости (x,y) с кусочно-гладкой границей; пусть $f(x,y)$ - определена и ограничена на S. С помощью сетки кусочно-гладких кривых область S разбивают на конечное количество элементарных областей S_i (i=1,2,…,n) с площадями ΔS_i (разбиение Z). Пусть Δ(Z) - наибольший размер элементарных областей S_i, получающийся при разбиении Z. В каждой из элементарных областей выбирается произвольная точка $M_i(x_i,y_i)$. Число:

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \, .$$

ставится в соответствие каждому разбиению Z и называется интегральной суммой разбиения Z. Функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области S в смысле Римана, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого разбиения Z области S, для которого $\Delta(Z)<\varepsilon$ и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство:

$$\left|\sigma(Z)-I\right|<\varepsilon\, .$$

Число I называется двойным интегралом Римана от $f(x,y)$ по области S и обозначается следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS\,;\ I=\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\, .$$

Эквивалентным этому определению является следующее: $f(x,y)$ интегрируема по области S, если для каждой последовательности Z_n разбиений с $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Z_n}=0$ последовательность соответствующих интегральных сумм $\sigma(Z_n)$ всегда сходится независимо от выбора промежуточных точек к одному и тому же значению, которое и есть двойной интеграл. Свойства двойных интегралов:

1) аддитивность относительно подъинтегральных соотношений:

$$I=\iint\limits_{(S)}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]dx\,dy=\iint\limits_{(S)} f_1(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S)} f_2(x,y)\,dx\,dy\,;$$

2) аддитивность относительно областей (S_1 и S_2 - области без общих внутренних точек):

$$I=\iint\limits_{(S_1+S_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S_1)} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_2)} f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$I=\iint\limits_{(S)} A\,f(x,y)\,dx\,dy=A\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

4) если для каждой точки $(x,y)\in S$ выполняется неравенство $f_1(x,y)\le f_2(x,y)$, то:

$$\iint\limits_{(S)} f_1(x,y)\,dx\,dy\le\iint\limits_{(S)} f_2(x,y)\,dx\,dy\,;$$

5) если $f(x,y)$ интегрируема по S, то $|f(x,y)|$ также интегрируема по S и:

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Двойные интегралы обладают ещё несколькими свойствами, но в ближайшее время они не понадобятся. Может быть показано, что

1) двойные интегралы могут рассматриваться как повторные;

2) порядок интегрирования может быть изменён.

<u>Пример 1</u>

Пусть S - область, описываемая функцией $f(x,y)=x\,y$ и ограниченная кривыми $y(x)=\sqrt{x}$ и $y(x)=x^2$, $x\in[0,1]$. Найдём площадь данной области.

$$I=\iint\limits_{S} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^6}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Аналогично для $x(y)=\sqrt{y}$ и $x(y)=y^2$, $y\in[0,1]$ можно получить:

$$I=\iint\limits_{S} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} x\,y\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y\,x\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y\left(y-y^4\right)dy=\frac{1}{6}\left(y^3-\frac{y^6}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

Замена переменных в двойных интегралах

Пусть функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ взаимно однозначно отображают области G (в переменных (u,v)) и S (в переменных (x,y)). Пусть функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ непрерывны со своими первыми частными производными на области G. Внутри G якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0.$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на S, то справедливо соотношение:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J|\,du\,dv.$$

<u>Пример 2</u>

Рассмотрим переход от декартовых координат к полярным, т.е. $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$. Тогда $J=r$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f\big(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi)\big)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1) Пусть $f(x,y)\geq 0$ на S. Двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,d\,x\,d\,y$ может быть интерпретирован как объём цилиндрического тела, основанием которого является область S плоскости (x,y) и которое ограничено поверхностью $z=f(x,y)$. Объём данного цилиндра численно равен площади ΔS области S, т.е.

$$\Delta S=\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,d\,x\,d\,y\,.$$

Пример 3

Найти объём цилиндрического тела, в основании которого находится круг $x^2+y^2\leq a\,y$, $z=0$, и которое ограничено сверху частью поверхности сферы $x^2+y^2+z^2\leq a^2$. Из-за симметрии можно записать, что

$$V=2\iint\limits_{(S)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\,x\,d\,y\,,$$

где S - полукруг $x^2+y^2\leq a\,y$, $x\geq 0$. В полярных координатах $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$ область S описывается неравенствами: $0\leq r\leq a\sin(\varphi), 0\leq\varphi\leq\pi/2$. После всех замен получаем:

$$V=2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a\sin(\varphi)} r\sqrt{a^2-r^2}\,d\,r\,d\,\varphi\,.$$

Подстановки во внутренний интеграл $t=\sqrt{a^2-r^2}$ позволяет получить:

$$V=-2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a\cos(\varphi)}\sqrt{a^2-r^2}\,d\,r\,d\,\varphi=-2\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\cos^3(\varphi)-1\right]d\,\varphi\,.$$

В окончательном форме последнее соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$V=\frac{a^3}{9}(3-4\pi).$$

Пример 4

Найти площадь области, ограниченную астроидой: $x=a\cos^3(t)$, $y=a\sin^3(t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$. Введение криволинейных координат $x=u\cos^3(v)$, $y=u\sin^3(v)$ позволяет получить:

$$V=2\iint\limits_{(S)} d\,x\,d\,y=3\int\limits_0^a u\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(v)\cos^2(v)\,d\,v\,d\,u=\frac{3}{4}\int\limits_0^a u\,d\,u\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(2v)\,d\,v=$$

$$=3\frac{a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}[1-\cos(4v)]\,d\,v=\frac{3}{8}\pi\,a^2\,.$$

Пример 5 (центр тяжести и масса)

Координаты центра тяжести x_0 и y_0 области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, определяются соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(S)} x\,\rho(x,y)\,dS\,;\; y_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(S)} y\,\rho(x,y)\,dS\,,$$

где $M = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y)\,dS$ - масса области S.

Пример 6 (момент инерции)

Момент инерции I_x плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно оси x определяется соотношением:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} y^2\,\rho(x,y)\,dS\,.$$

Момент инерции I_y плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_y = \iint\limits_{(S)} x^2\,\rho(x,y)\,dS\,.$$

Полярный момент инерции I_O плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно начала координат определяется соотношением:

$$I_O = \iint\limits_{(S)} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)\,dS\,.$$

Раздел 2. Тройные интегралы

Определение 2

Пусть задана ограниченная пространственная область V, граница которой является кусочно-гладкой поверхностью. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена в области V. Путём выбора сети кусочно-гладких поверхностей строится некоторое разбиение Z области V на конечное число элементарных областей V_i (i=1,2,…,n) с объёмами ΔV_i. Пусть Δ(Z) - наибольший размер элементарной области V_i. Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i\,.$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Функция $f(x, y,z)$ называется интегрируемой в области V в смысле Римана, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого разбиения Z области V, для которого $\Delta(Z) < \varepsilon$ и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство:

$$|\sigma(Z) - I| < \varepsilon.$$

Число I называется тройным интегралом Римана от $f(x,y,z)$ по области V и обозначается следующим образом:

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV\,;\; I = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройных интегралов

Пусть V является телом, проекция которого на плоскость x,y является областью S. Пусть тело V также ограничено поверхностями $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$, а также $x=a$ и $x=b$. Тогда

$$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(S)}\left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx.$$

Замена переменных в тройных интегралах

Пусть функции $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ и $z=z(u,v,w)$ взаимно однозначно отображают области G (в переменных (u,v,w)) и S (в переменных (x,y,z)). Пусть функции $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ и $z=z(u,v,w)$ непрерывны со своими первыми частными производными на области G. Внутри G якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на V, то справедливо соотношение:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V)} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|\,du\,dv\,dw.$$

<u>Пример 7</u>

Рассмотрим переход от декартовых координат к полярным, т.е. $x=r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z=r\cos(\theta)$. Тогда $J=r^2\,sin(\theta)$ и

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{(G)} r^2\sin(\theta) f\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta)\big)\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1) Объём пространственной области, ограниченной функцией $f(x,y,z)$. Тройной интеграл по V является объёмом ΔV области V, т.е.

$$\Delta V=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

<u>Пример 8</u>

Пусть имеется эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Найдём его объём с помощью последнего соотношения. Преобразуем данное соотношение с учётом уравнения для эллипса к следующему виду:

$$\Delta V=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}d\,z\,d\,y\,d\,x=cR\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,d\,y\,d\,x=$$

$$=\begin{bmatrix}x=a\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ y=b\sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}=a\,b\,c\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)-\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)}\,d\,\varphi\,d\,\theta=$$

$$=\pi\,a\,b\,c\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\,\theta=-\pi\,a\,b\,c\left.\frac{\cos(2\theta)}{2}\right|_{0}^{\pi}=\pi\,a\,b\,c\,.$$

<u>Пример 9 (масса тела)</u>

Если пространственная область V заполнена массой с плотностью $\rho\,(x,y,z)$, то полная масса V определяется следующим соотношением:

$$M=\iiint\limits_{(V)}\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

<u>Пример 10 (центр тяжести)</u>

Координаты центра тяжести x_0, y_0 и z_0 области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, определяются соотношениями:

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)}x\cdot\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,;\ \ y_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)}y\cdot\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,;$$

$$z_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)}z\cdot\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

<u>Пример 11 (момент инерции)</u>

Момент инерции I_x объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси x определяется соотношением:

$$I_x=\iiint\limits_{(V)}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

Момент инерции I_y объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_y=\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

Момент инерции I_z объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y, z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

Раздел 3. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Определение 3

Пусть L - отрезок кусочно-гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $f(x,y)$ - ограниченная функция, заданная в некоторой области, содержащей кривую L. На L выбираются произвольные точки $A=A_0$, A_1, …, A_{n-1}, $A_n=B$. Таким образом, криволинейный отрезок AB разбивается на элемнтарные отрезки. Пусть длина отрезка $A_{i-1}A_i$ ($i=1,\ldots,n$) равна Δs_i. Пусть $M(x_i,y_i)$ - произвольная точка на элементарном отрезке $A_{i-1}A_i$. Выражение

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

называется интегральной суммой относительно разбиения Z. Предел данной интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной длины отрезка Δs_i называется криволинейным интегралом первого рода. Рассматриваемый интеграл обозначается следующим образом:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x, y)\,d\,s \Leftrightarrow \int\limits_{(AB)} f(x, y)\,d\,s\,.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода от функции трёх переменных $f(x,y,z)$. Следует заметить, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления движения по кривой L, т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,d\,s = \int\limits_{(BA)} f(x, y)\,d\,s\,.$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Возможны следующие представления криволинейных интегралов первого рода:

1) если L - отрезок кусочно-гладкой кривой заданной параметрически ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), то с учётом соотношения $d\,s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,d\,t$ интеграл может быть вычислен с помощью следующего соотношения:

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,d\,s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,d\,t\,.$$

Аналогично для кривой в пространстве ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$) получаем:

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,d\,s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,d\,t\,.$$

2) если плоская кривая $y=f(x)$ ($a \le x \le b$) задана в явном виде, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,d\,s = \int\limits_{a}^{b} f(x, y)\,d\,x\,.$$

Пример 12

Пусть L - верхняя полуокружность радиуса r, описанная вокруг начала координат. Параметрическое представление кривой имеет следующий вид: $x=r\cdot cos(t)$, $y=r\cdot sin(t)$, $0\le t\le\pi$. Тогда $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=r$ и

$$\int\limits_{(L)} y\,d\,s=\int\limits_0^{\pi} r\sin(t)(r\,d\,t)=-r^2\cos(t)\Big|_0^{\pi}=2r^2 .$$

Свойства криволинейных интегралов первого рода

1) Линейность. Пусть для функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой AB и α и β - некоторые постоянные. Тогда для функции $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB и

$$\int\limits_{(AB)}\left[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right]d\,s=\alpha\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,d\,s+\beta\int\limits_{(AB)} g(x,y)\,d\,s .$$

2) Аддитивность. Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, не имеющих общих внутренних точек и если для функции $f(x,y)$ существует криволинейный интеграл по AB, то для $f(x,y)$ существует криволинейный интеграл по каждой из этих дуг AC и CB, причём

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,d\,s=\int\limits_{(AC)} f(x,y)\,d\,s+\int\limits_{(CB)} f(x,y)\,d\,s .$$

3) Оценка модуля интеграла. Если существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $f(x,y)$, то существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $|f(x,y)|$, причём:

$$\left|\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,d\,s\right|\le\int\limits_{(AB)}\left|f(x,y)\right|d\,s .$$

4) Формула среднего значения. Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдётся такая точка M, что

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,d\,s=l\,f(M),$$

где l - длина кривой AB.

Следует заметить, что в полной аналогии с изложенной теорией криволинейного интеграла на плоскости, строится теория криволинейного интеграла в пространстве.

Теорема (формула) Грина (Остроградского-Грина)

Пусть G - замкнутая плоская область и её граница L является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей G_i с кусочно-гладкими границами L_i, i=1, 2, …, k. Пусть в G заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на G вместе со своими частными производными $\partial P(x,y)/\partial y$ и $\partial Q(x,y)/\partial x$. Тогда справедливо соотношение:

$$\iint\limits_{(G)}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]d\,x\,d\,y=\int\limits_L P(x,y)\,d\,x+Q(x,y)\,d\,y .$$

Подробное доказательство изложено в “Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. 2. М. Высшая школа, 1981. С.199”.

Геометрические приложения криволинейных интегралов

Длина дуги

Криволинейный интеграл первого рода может быть использован для вычисления длины дуги кривой.

Пример 13

Найти длину пространственной кривой L, определяемой параметрическими уравнениями: $x(t)=e^{-t}cos(t)$, $y(t)=e^{-t}sin(t)$, $z(t)=e^{-t}$ при $0\le t\le 2\pi$. Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_{(L)} 1\,d\,s$. С помощью соотношения

$$\int\limits_{(L)} d\,s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\;d\,t.$$

получаем:

$$\int\limits_{(L)} d\,s=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{\left[e^{-t}\cos(t)\right]'^2+\left[e^{-t}\sin(t)\right]'^2+\left(e^{-t}\right)'^2}\;d\,t=\int\limits_{0}^{2\pi}\left\{\left[-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\sin(t)\right]^2+e^{-2t}+\right.$$

$$\left.+\left[-e^{-t}\sin(t)+e^{-t}\cos(t)\right]^2\right\}^{1/2}d\,t=\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-t}\left\{\cos^2(t)+2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)+\cos^2(t)+\right.$$

$$\left.+\sin^2(t)-2\cos(t)\sin(t)+1\right\}d\,t=\sqrt{3}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-t}\,d\,t=\sqrt{3}\left(1-e^{-2\pi}\right).$$

Вычисление площади

Пусть в формуле Грина $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=x$, получаем:

$$\iint\limits_{(G)} d\,x\,d\,y=\int\limits_{L} x\,d\,y.$$

Тогда площадь области G определяется соотношением:

$$S=\int\limits_{L} x\,d\,y.$$

Аналогично при $P(x,y)=-y$ и $Q(x,y)=0$ в формуле Грина имеем:

$$S=\iint\limits_{(G)} d\,x\,d\,y=-\int\limits_{L} y\,d\,x.$$

Складывая полученные соотношения, получаем:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{L} x\,d\,y+y\,d\,x.$$

Пример 14

Найдём с помощью полученного соотношения площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Для этого воспользуемся параметрическим представлением уравнения эллипса $x(t)=a\cdot cos(t)$, $y(t)=b\cdot sin(t)$. Подставляя это представление в последнее соотношение для площади, получаем:

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\,d\,y+y\,d\,x=\frac{1}{2}a\,b\int_0^{2\pi}\left[\cos^2(t)+\sin^2(t)\right]d\,t=\pi\,a\,b\,.$$

Криволинейный интеграл второго рода

Определение 4

Пусть L - отрезок кусочно-гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $f(x,y)$ - ограниченная функция, заданная вдоль кривой L. На L выбираются произвольные точки $A=A_0$, A_1, …, A_{n-1}, $A_n=B$. Таким образом, криволинейный отрезок AB разбивается на элементарные отрезки. Пусть $M(x_i,y_i)$ - произвольная точка на элементарном отрезке $A_{i-1}A_i$. Выражение

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i,y_i\right)\Delta\,x_i$$

называется интегральной суммой относительно выбранного разбиения. Следует заметить, что в данном случае рассматривается не длина элементарного отрезка Δs_i, а её проекция $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Предел данной интегральной суммы при стремлении к нулю длины максимального отрезка Δx_i называется криволинейным интегралом второго рода. Рассматриваемый интеграл обозначается следующим образом:

$$I=\int_{(L)}f\left(x,y\right)d\,x\Leftrightarrow\int_{(AB)}f\left(x,y\right)d\,x\,.$$

Если начальная и конечная точки совпадают, то интеграл по замкнутой кривой обозначается следующим образом:

$$I=\oint f\left(x,y\right)d\,x\,.$$

Аналогично, домножая значение функции $f(x,y)$ в точке $M(x_i,y_i)$ на проекцию $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, получаем криволинейный интеграл от $f(M)dy$:

$$I=\int_{(L)}f\left(x,y\right)d\,y\Leftrightarrow\int_{(AB)}f\left(x,y\right)d\,y\,.$$

Если вдоль кривой L: AB определены две функции $P(M)=P(x,y)$ и $Q(M)=Q(x,y)$, и существуют интегралы

$$\int_{(L)}P\left(M\right)d\,x\Leftrightarrow\int_{(L)}P\left(x,y\right)d\,x\,;\;\int_{(L)}Q\left(M\right)d\,y\Leftrightarrow\int_{(L)}Q\left(x,y\right)d\,y\,,$$

то их сумму называют криволинейным интегралом (“общего вида”) и полагают

$$\int_{(L)}P\left(x,y\right)d\,x+Q\left(x,y\right)d\,y=\int_{(L)}P\left(x,y\right)d\,x+\int_{(L)}Q\left(x,y\right)d\,y\,.$$

Свойства криволинейных интегралов второго рода совпадают со свойствами криволинейных интегралом первого рода, но следует заметить, что криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Возможны следующие представления криволинейных интегралов второго рода:

1) если L - отрезок кусочно-гладкой заданной параметрически ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), то интеграл может быть вычислен с помощью следующего соотношения:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt$$

или

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt\,.$$

Аналогично для кривой в пространстве ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$) получаем:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Данное выражение может быть также представлено в следующих формах

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)\,dt\,,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\,dt\,.$$

2) если плоская кривая $y=f(x)$ ($a \le x \le b$) задана в явном виде, то

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx\,.$$

Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

Пусть в области G заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на G вместе со своими частными производными $\partial P(x,y)/\partial y$ и $\partial Q(x,y)/\partial x$. Тогда криволинейный интеграл не зависит от выбора кривой L, целиком лежащей в G и соединяющей точки A и B, если существует однозначная функция $U(x,y)$ (потенциал силового поля), производные которой удовлетворяют условию: $\partial U(x,y)/\partial x=P(x,y)$ и $\partial U(x, y)/\partial y=Q(x,y)$.

Связь криволинейных интегралов второго рода с криволинейными интегралами первого рода

Криволинейный интеграл второго рода может быть вычислен по аналогии с криволинейным интегралом первого рода с помощью следующего соотношения:
в двухмерном случае:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)dx = \int\limits_{(L)} f(x,y)\cos(\alpha)\,ds\,,\ \int\limits_{(L)} f(x,y)dy = \int\limits_{(L)} f(x,y)\sin(\alpha)\,ds\,.$$

в трёхмерном случае:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\alpha)\,ds\,,\ \int\limits_{(L)} f(x,y,z)dy = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\beta)\,ds\,,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\gamma)\,ds,$$

где α, β и γ - углы между элементом дуги и осями координат.

Механические приложения криволинейных интегралов

<u>*Масса и центр тяжести кривой L*</u>

Если масса гладкой кривой L распределена с плотностью $\rho(x,y,z)$, то масса кривой определяется соотношением:

$$M = \int\limits_{(L)} \rho(x,y,z)\,ds.$$

Координаты центра тяжести равны:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} x\,\rho(x,y,z)\,ds,\ y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} y\,\rho(x,y,z)\,ds,\ z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} z\,\rho(x,y,z)\,ds.$$

<u>Пример 15</u>

Вычислить массу и координаты центра тяжести циклоиды: $x=r[t\text{-}sin(t)]$, $y=r[1\text{-}cos(t)]$, $0\le t\le 2\pi$ с равномерно распределённой массой ρ=1.

Искомые масса и координаты определяются с помощью стандартных соотношений:

$$M = \int\limits_{(L)} \rho(x,y,z)\,ds = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt = r\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{[1-\cos(t)]^2+\sin^2(t)}\,dt =$$

$$= r\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\,dt = -2\sqrt{2}r\sqrt{1-\cos(t)}\,ctg(t)\Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\,r,$$

$$\xi = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} x\,ds = \sqrt{2}\frac{r^2}{8r}\int\limits_0^{2\pi}[t-\sin(t)]\sqrt{1-\cos(t)}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\frac{r}{4}[\sin(t)-t]\sqrt{1-\cos(t)}\left[t\,ctg\left(\frac{t}{2}\right)-2\right],$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} y\,ds = \sqrt{2}\frac{r^2}{8r}\int\limits_0^{2\pi}[1-\cos(t)]\sqrt{1-\cos(t)}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(t)}\frac{r}{24}\left[\cos\left(3\frac{t}{2}\right)-9\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]ctg\left(\frac{t}{2}\right).$$

<u>*Работа силы вдоль кривой L*</u>

Если $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$ - сила, которая вдоль кривой L меняется по величине и направлению, а $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ - ортонормированный базис, то при движении материальной точки единичной массы под влиянием этой силы совершается работа:

$$A = \int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Работа только тогда не зависит от пути интегрирования L, соединяющего две точки, когда подъинтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции. Тогда работа вычисляется как разность потенциалов в данной точке.

Пример 16

Если компоненты силы равны $P=x/r^3$, $Q=y/r^3$ и $R=z/r^3$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то существует потенциал $U(x,y,z)$ и сила совершает вдоль некоторой кривой L, соединяющей точки (x_0,y_0,z_0) и (x_1,y_1,z_1) и не проходящей через начало координат, работу:

$$A=U(x_1,y_1,z_1)-U(x_0,y_0,z_0).$$

Раздел 4. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл первого рода

Определение 5

Пусть некоторая функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена на гладкой поверхности S. Пусть Z - некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i ($i=1,2,\ldots,n$) с площадями ΔS_i. Δ(Z) - наибольший из размеров элементарных поверхностей S_i. $M_i(x_i,y_i,z_i)$ - произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности S_i. Число

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Рассмотрим в интегральной сумме предел $\Delta(Z)\to 0$. Тогда, если предел существует, то называется поверхностным интегралом первого рода. Такой интеграл обозначается следующим образом:

$$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS.$$

Если функция $f(x,y,z)$ равна единице, то рассматриваемый интеграл равен поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода (сведение к двойному интегралу)

Если поверхность задана параметрически, т.е. $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $z=z(u,v)$, причём u и v принимают значения в области Н(u,v) (считается, что существует взаимно однозначное соответствие между областями $S(x,y,z)$ и Н(u,v)), то поверхностный интеграл первого рода можно вычислить следующим образом:

$$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS=\iint_{(S)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))F(u,v)\,dS=$$

$$=\iint_{(S)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left\{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]-\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}} d\,S\,.$$

Если поверхность задана в явном виде, т.е. $z=z(x,y)$, тогда

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\,S=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right]^2}\,d\,x\,d\,y\,.$$

Для случая, когда поверхность S задана уравнениями $x=x(y,z)$ или $y=y(y,z)$, можно получить аналогичные соотношения.

Пример 17

Пусть поверхность S является сферой радиуса r с параметрическим представлением $x=r\cdot sin(\theta)\,cos\,(\varphi)$, $y=r\cdot sin\,(\theta)sin\,(\varphi)$ и $z=r\cdot cos(\theta)$. Тогда H является прямоугольником $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $F=r^2 sin(\theta)$ и

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\,S=\iint\limits_{(S)} f(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta))r^2\sin(\theta)d\,\theta\,d\,\varphi=$$

$$=r^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta))\sin(\theta)d\,\theta\,d\,\varphi\,.$$

Пример 18

Пусть S - цилиндрическая поверхность $x^2+y^2=a^z$, $0\leq a\leq h$. Её параметрическое представление $x=a\cdot cos\,(\varphi)$, $y=a\cdot sin\,(\varphi)$ и $z=z$. Тогда H является прямоугольником $0\leq z\leq h$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $F=a$ и

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\,S=\iint\limits_{(S)} f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi),z)a\,d\,\varphi\,d\,z=$$

$$=a\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi),z)d\,\varphi\,d\,z\,.$$

Поверхностный интеграл второго рода

Определение 6

Пусть в точках поверхности S, однозначно проектирующейся на поверхность Oxy, определена ограниченная функция $f(x,y,z)$. Пусть Z - некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i (i=1,2,…,n) с площадями ΔS_i. Δ(Z) - наибольший из размеров элементарных поверхностей S_i. $M_i(x_i,y_i,z_i)$ - произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности S_i. Пусть выбрана определённая сторона поверхности (т.е. поверхность S ориентирована). Тогда установленной направление обхода границы каждой элементарной поверхности S_i определяет направление обхода в плоскости Oxy границы проекции S_i'. Площадь ΔS_i' этой проекции берётся со знаком "+", если граница проекции S_i' проходится в положительном направлении. В противном случае площадь ΔS_i' этой проекции берётся со знаком "-". Число

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i'$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Следует заметить, что в интегральную сумму поверхностных интегралов входит не площадь ΔS_i элементарной поверхности S_i, а ориентированная площадь ΔS_i’ проекции S_i’ поверхности S_i на плоскость Оxy. Рассмотрим в интегральной сумме предел $\Delta(Z)\to 0$. Тогда, если предел существует, то называется поверхностным интегралом второго рода. Такой интеграл обозначается следующим образом:

$$I=\iint_{(S')} f(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Если S проектируется на плоскость Оxy неоднозначно, но её можно разбить на конечное число поверхностей, для каждой из которых однозначная проекция существует, то поверхностный интеграл по S представляется как сумма интегралов по каждой из однозначных проекций. Если S имеет однозначную проекцию на плоскости Оxz или Оyz, то аналогично можно определить два других поверхностных интеграла:

$$I=\iint_{(S')} f(x,y,z)\,dx\,dz \text{ и } I=\iint_{(S')} f(x,y,z)\,dy\,dz.$$

Определение 7

Выбирается определённая сторона поверхности S. Каждая замкнутая кривая на S сохраняет направление нормали при движении по ней в том смысле, что оно вместе с нормалью выбранной стороны образует правый винт.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода (сведение к двойному интегралу)

Пусть поверхность S имеет явное представление $z=z(x,y)$, причём (x,y) изменяется в области S’. Тогда поверхностный интеграл по той стороне поверхности S, для которой угол между нормалью и осью z является острым, вычисляется с помощью следующего соотношения:

$$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=\iint_{(S')} f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy.$$

Если выбирается другая сторона поверхности, то

$$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=-\iint_{(S')} f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy.$$

Аналогично получаем:

1) $$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dy\,dz=\iint_{(S')} f(x(y,z),y,z)\,dy\,dz,$$

где поверхность S задана уравнением $x=x(y,z)$, S’ - проекция поверхности S на плоскость Оyz, а поверхностный интеграл берётся по той стороне, нормаль с которой образует с осью x острый угол;

2) $$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,d\,x\,d\,z=\iint\limits_{(S')} f\left(x,y(x,z),z\right)d\,x\,d\,z\,,$$

где поверхность S задана уравнением $y=y(x,z)$, S' - проекция поверхности S на плоскость Оxz, а поверхностный интеграл берётся по той стороне, нормаль с которой образует с осью y острый угол.

Если поверхность задана параметрически, т.е. $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $z=z(u,v)$, причём u и v принимают значения в области Н(u,v) (считается, что существует взаимно однозначное соответствие между областями $S(x,y,z)$ и Н(u,v)), то поверхностный интеграл второго рода можно вычислить следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,d\,x\,d\,y=\pm\iint\limits_{(S')} f\left(x(u,v),y(u,v),z\left(x(u,v),y(u,v)\right)\right)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}d\,u\,d\,v\,,$$

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,d\,x\,d\,z=\pm\iint\limits_{(S')} f\left(x(u,v),y\left(x(u,v),y(u,v)\right),z(u,v)\right)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}d\,u\,d\,v\,,$$

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,d\,y\,d\,z=\pm\iint\limits_{(S')} f\left(x\left(y(u,v),z(u,v)\right),y(u,v),z(u,v)\right)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}d\,u\,d\,v\,.$$

Положительный знак в правых частях выбирается тогда, когда ориентация S' соответствует ориентации S.

<u>Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода</u>

Пусть α, β и γ - углы нормали к выбранной стороне поверхности с осями x, y и z, то

$$I=\iint\limits_{(S')} U_x(x,y,z)\,d\,y\,d\,z+U_y(x,y,z)\,d\,z\,d\,x+U_z(x,y,z)\,d\,x\,d\,y=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[U_x(x,y,z)\cos(\alpha)+U_y(x,y,z)\cos(\beta)+U_z(x,y,z)\cos(\gamma)\right]d\,S\,.$$

<u>Пример 19</u>

Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I=\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,d\,x\,d\,y\,.$$

где S - внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Выразим z в явном виде: $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. Тогда

$$I=\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,dx\,dy=c\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx.$$

Вычисление такого интеграла позволяет получить

$$I=c\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx=abc\pi\frac{2}{3}.$$

Интегральные теоремы

Теорема (формула) Гаусса (Остроградского-Гаусса)

Данная теорема связывает поток векторного поля $\vec{U}(x,y,z)$ через замкнутую поверхность S и интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{U}(x,y,z)$ по объёму области V, ограниченному рассматриваемой поверхностью S, ориентированной в направлении её внешней нормали $\vec{n}$. Формулировка этой теоремы имеет следующий вид:

$$\iiint\limits_{(V)} div\vec{U}(x,y,z)\,dV=\iint\limits_{(S)}\left(\vec{n}\cdot\vec{U}(x,y,z)\right)dS.$$

В эквивалентной форме записи данная теорема имеет следующий вид:

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial U_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial U_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial U_z(x,y,z)}{\partial z}\right]dV=\iint\limits_{(S)}\left(\vec{n}\cdot\vec{U}(x,y,z)\right)dS.$$

Теорема (формула) Стокса

Данная теорема связывает поток векторного поля $rot\vec{U}(x,y,z)$ через ориентированную поверхность S и циркуляцию $\vec{U}(x,y,z)$ по контуру L этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации S. Формулировка этой теоремы имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{(S)}\left(\vec{n}\cdot rot\vec{U}(x,y,z)\right)dS=\int\limits_{(L)}\vec{U}(x,y,z)\,dl.$$

Приложения поверхностных интегралов

Объём тела

Объём тела ΔV, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью S, можно вычислить как поверхностный интеграл второго рода с помощью следующих соотношений:

$$\Delta V = \iint\limits_{(S)} z(x,y)\,d\,x\,d\,y\,;\ \Delta V = \iint\limits_{(S)} y(x,z)\,d\,z\,d\,x\,;\ \Delta V = \iint\limits_{(S)} x(y,z)\,d\,y\,d\,z\,;$$

$$\Delta V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,d\,x\,d\,y + y(x,z)\,d\,z\,d\,x + x(y,z)\,d\,y\,d\,z\,.$$

Интегралы необходимо брать по внешней стороне поверхности S.

Пример 20

Пусть пространственная область V ограничена эллипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Параметрическое представление данной поверхности имеет следующий вид: $x= a\,sin(\theta)\,cos(\varphi)$, $y=b\,sin(\theta)\,sin(\varphi)$, $z=c\,cos(\theta)$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Из-за того, что якобиан преобразования равен следующей величине

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\dfrac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta}\cos(\varphi) & a\sin(\theta)\dfrac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi} \\ b\dfrac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta}\sin(\varphi) & b\sin(\theta)\dfrac{\partial \sin(\varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= a\,b\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\varphi) + a\,b\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\varphi) = a\,b\sin(\theta)\cos(\theta),$$

получаем:

$$\Delta V = \iint\limits_{(S)} z(x,y)\,d\,x\,d\,y = c\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,d\,y\,d\,x = a\,b\,c\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\cos(\theta)\times$$

$$\times\sqrt{1-\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)-\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)}\,d\,\theta\,d\,\varphi = 2\pi\,a\,b\,c\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\cos^2(\theta)\,d\,\theta = -2\pi\times$$

$$\times a\,b\,c\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2(\theta)\,d\cos(\theta) = -\frac{2}{3}\pi\,a\,b\,c\cos^3(\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi\,a\,b\,c\left[1-\cos^3(\pi)\right] = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c\,.$$

Центр тяжести и сила притяжения

Если по поверхности S распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$, то полная масса поверхности равна

$$M = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y,z)\,d\,S\,.$$

Координаты центра тяжести определяются следующими соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(S)} x\,\rho(x,y,z)\,d\,S\,;\ y_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(S)} y\,\rho(x,y,z)\,d\,S\,,\ z_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(S)} z\,\rho(x,y,z)\,d\,S\,.$$

Компоненты силы притяжения $\vec{F}$ рассмотренного распределения массы, действующую на материальную точку $M(x_0,y_0,z_0)$ единичной массы соответственно равны:

$$F_x = \omega \iint\limits_{(S)} \frac{x-x_0}{r^3} d\,S\,;\; F_y = \omega \iint\limits_{(S)} \frac{y-y_0}{r^3} d\,S\,,\; F_z = \omega \iint\limits_{(S)} \frac{z-z_0}{r^3} d\,S\,,$$

где ω - гравитационная постоянная.

Пример 21

Пусть по поверхности конуса $R^2x^2=h^2(y^2+z^2)$ распределена масса с единичной плотностью. Найдём координаты центра тяжести. Из условия симметрии $x_0=y_0=0$, т.к. поверхность S задана уравнением:

$$x = \frac{h}{R}\sqrt{y^2+z^2}\,.$$

При этом переменные y и z принимают значения внутри круга $y^2+z^2=R^2$. Третья координата центра тяжести определяется с помощью соотношения:

$$x_0 = \iint\limits_{(S)} x\,d\,S = \frac{h}{R}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2/R^2}}^{\sqrt{1-x^2/R^2}} \sqrt{y^2+z^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,d\,y\,d\,z =$$

$$= \frac{h}{R}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2/R^2}}^{\sqrt{1-x^2/R^2}} \sqrt{y^2+z^2}\sqrt{1+\frac{h^2 y}{R^2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{h^2 z}{R^2\sqrt{y^2+z^2}}}\,d\,y\,d\,z\,.$$

Переход к полярным координатам $y=r\cos(\varphi)$ и $z=r\sin(\varphi)$ позволяет получить:

$$x_0 = \frac{h}{R}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} r^2\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}\cos(\varphi)+\frac{h^2}{R^2}\sin(\varphi)}\,d\,\varphi\,d\,r = 2\,h\,R\,\frac{\pi}{3}\sqrt{h^2+R^2}\,.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Найти: (*i*) массу области S, распределённую с плотностью $\rho(x,y)$; (*ii*) координаты центра тяжести области S.

1.01 $\rho(x,y)=x\cdot y^2-2$, S: $y=x^4$, $y=\sqrt{x}$;

1.02 $\rho(x,y)=x\cdot(x-y-1)$, S: $y=x^2$, $x=0$, $y=1$;

1.03 $\rho(x,y)=y(x+1-y)$, S: $y=x$, $y=x^3$;

1.04 $\rho(x,y)=y\cdot(x^2-y)+1$, S: $y=x^4$, $y=1-x^2$;

1.05 $\rho(x,y)=3x^2\cdot y-y+1$, S: $y=x$, $y=1-x^2$;

1.06 $\rho(x,y)=x\cdot y-4x+y-1$, S: $y=x^2$, $y=1$, $x>0$;

1.07 $\rho(x,y)=1-x\cdot y^3$, S: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;

1.08 $\rho(x,y)=x\cdot y(8+9xy)$, S: $y=-x^3$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

1.09 $\rho(x,y)=9x^2\cdot y^2-x+y$, S: $y=x$, $y=\sqrt{x}$;

1.10 $\rho(x,y)=12x^2\cdot y^2-1$, S: $x=1$, $y=-x^2$, $y=-\sqrt{x}$;

1.11 $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=\pm 2$;

1.12 $\rho(x,y)=x^2\cdot y^2$, S: $xy=4$, $y=x$, $y=0$, $x=4$;

1.13 $\rho(x,y)=y-x$, S: $y^2=4+x$, $x^2=-3y$;

1.14 $\rho(x,y)=x\cdot y^2-x^2\cdot y$, S: $4y=x^2$, $y=x^2$, $y=4$;

1.15 $\rho(x,y)=1$, S: $y=x$, $x=1+y$, $y=-1$, $y=0$;

1.16 $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $ay=x^2$, $4y=x^2-2ax$, $y=x$;

1.17 $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $x^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$, $x\geq 0$;

1.18 $\rho(x,y)=1$, S: $y=sin(x)$, $y=cos(x)$, $x\in[0;\ \pi/4]$;

1.19 $\rho(x,y)=1$, S: $xy=1$, $xy=8$, $x=1$, $x=2$;

1.20 $\rho(x,y)=y^2-x^2$, S: $y^2=x^2$, $y=2+x$, $x=0$;

1.21 $\rho(x,y)=y$, S: $y=e^{-x}$, $x=1$, $y=1$;

1.22 $\rho(x,y)=y\cdot sin^2(x)$, S: $y=x^2$, $y=x^4-2x^2$;

1.23 $\rho(x,y)=x$, S: $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=x$;

1.24 $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $x^2+y^2=a^2$, $x=-a$, $x=a$, $y=0$, $y=2\sqrt{x}$;

1.25 $\rho(x,y)=y$, S: $y=0$, $y=x^4-2x^2$;

1.26 $\rho(x,y)=x\cdot y^2-x+1$, S: $y=8-x$, $x=0$, $y=2\sqrt{x}$;

1.27 $\rho(x,y)=2-y+x$, S: $y^2=ax$, $y=x$;

1.28 $\rho(x,y)=1$, S: $y^2=a\cdot x$, $x=a$;

1.29 $\rho(x,y)=y^2$, S: $y=x^2$, $x=\pm 4$;

1.30 $\rho(x,y)=x^2$, S: $y=1+x^2/2$, $y=2x$, $x=0$.

II) Вычислить объём области V.

2.01 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=2$, $x=5$;

2.02 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x^2$, $y=1-x^2$;

2.03 V: $z\geq 0$, $z+y^2=9$, $x^2+y^2=9$;

2.04 V: $z=0$, $z+x^2=1$, $y=0$, $y=3$;

2.05 V: $x=0$, $z=0$, $z+y=2$, $x^2+y^2=4$;

2.06 V: $z=0$, $z+y^2=1$, $y=x^2$, $y=1-x^2$;

2.07 V: $z=0$, $4z=1-y^2$, $2x=y$, $x+y=9$;

2.08 V: $z=0$, $z=1$, $y=sin(x)$, $y=cos(x)$, $x\in[0;\pi/4]$;

2.09 V: $z=0$, $z=4-y^2$, $x^2+y^2=9$;

2.10 V: $z=0$, $z=9-y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $x=3$;

2.11 V: $z=0$, $x+y+z=3$, $x^2+y^2=4$;

2.12 V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y=x^2$, $y=4-x^2$;

2.13 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=\pm 2$;

2.14 V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y^2=4+x$, $x=2-3y^2$;

2.15 V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y=1-x^2$, $y=-1$;

2.16 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=3x^2-2$, $y=2x$;

2.17 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x^2+y^2=1$; 2.18 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x$, $x=1$, $x=2$;

2.19 V: $z=2$, $x^2+y^2=z$; 2.20 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x-y=1$, $x=1$, $x=2$;

8.02.21 V: $z=0$, $z-x=0$, $x^2+y^2=25$; 2.22 V: $z=1$, $z=4\sqrt{y}$, $y=0$, $x=0$, $x=4$;

8.02.23 V: $x^2+z^2=25$, $y=-1$, $y=1$; 2.24 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=0$, $x=4$;

8.02.25 V: $y^2+z^2=16$, $x=2$, $x=10$; 8.02.26 V: $z=0$, $z=5$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;

8.02.27 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x^2+y^2=1$; 8.02.28 V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x^2$;

8.02.29 V: $z=0$, $z=4-y^2$, $x^2+y^2=16$; 8.02.30 V: $z=0$, $x+y-z=5$, $x^2+y^2=9$.

III) Вычислить криволинейные интегралы по контуру L.

3.01 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(2,2)$;

3.02 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x$, L: дуга OA параболы $y=x^2/2$, $O(0,0)$, $A(2,2)$;

3.03 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x-x\,d\,y$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(2,0)$;

3.04 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x-x\,d\,y$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,2)$;

3.05 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x$, L: треугольник с вершинами OAB, $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

3.06 $\int\limits_{(L)}y\,d\,x+x\,d\,y$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,2)$;

3.07 $\int\limits_{(L)}y\,d\,x+x\,d\,y$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

3.08 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x-2x\,d\,y$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

3.09 $\int\limits_{(L)}2x\,y\,d\,x+x^2\,d\,y$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

3.10 $\int\limits_{(L)}\cos(2\,y)d\,x-2x\sin(2\,y)d\,y$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

3.11 $\int\limits_{(L)}tg(y)d\,x+x\,d\,y/\cos(y)$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

3.12 $\int\limits_{(L)}(x+y)d\,x$, L: первая четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3.13 $\int\limits_{(L)}y^2\,d\,x+(x+y)^2\,d\,y$, L: третья четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3.14 $\int\limits_{(L)}(x-y)d\,x$, L: треугольник с вершинами $A(a,0)$, $B(a,a)$,$C(0,a)$;

3.15 $\int\limits_{(L)} \left(x - y^2\right) dx$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(3,3)$;

3.16 $\int\limits_{(L)} \left(x^2 + y\right) dy$, L: дуга OA параболы $y^2=x/2$, $O(0,0)$, $A(8,2)$;

3.17 $\int\limits_{(L)} \left(x^2 + y^2\right) dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(2,0)$;

3.18 $\int\limits_{(L)} \left(x^2 - y^2\right) dx + x\,dy$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,3)$;

3.19 $\int\limits_{(L)} xy\,dx + x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

3.20 $\int\limits_{(L)} xy\,dx - x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

3.21 $\int\limits_{(L)} \cos(2y)dx + 2x\sin(2y)dy$, L: прямая AB, $A(1,\pi/4)$, $B(1,\pi/4)$;

3.22 $\int\limits_{(L)} tg(y)dx + x\cos(x)dy$, L: прямая AB, $A(\pi/4,\pi/3)$, $B(\pi/3,\pi/6)$;

3.23 $\int\limits_{(L)} x^2y^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, L: вторая четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

3.24 $\int\limits_{(L)} \left(x^2 + y\right)dy$, L: третья четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

3.25 $\int\limits_{(L)} \left(x + y^2\right) dy$, L: треугольник с вершинами $A(2,3)$, $B(3,3)$,$C(3,2)$;

3.26 $\int\limits_{(L)} \left(5x - 4y^2\right) dx + x\,dy$, L: дуга AB линии $y=4x^3$, $A(2,32)$, $B(3,108)$;

3.27 $\int\limits_{(L)} (x + y)dx$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(3,5)$, $B(4,0)$;

3.28 $\int\limits_{(L)} \left(x^2 + y\right)dy + 3x\,dy$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

3.29 $\int\limits_{(L)} 5x\,dx + (x - y)dy$, L: дуга AB линии $y=x^2$, $A(2,4)$, $B(3,9)$;

3.30 $\int\limits_{(L)} (x - y)^2\,dy$, L: треугольник с вершинами $A(2,5)$, $B(3,5)$, $C(2,0)$.

IV) Найти массу и координаты центра тяжести кривой L (контур для каждого варианта определён в задании III) с плотностью $\rho(x,y,z)=xyz$.

V) Найти работу силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вдоль кривой L. Контур для каждого варианта определён в предыдущем задании.

5.01 $P=5x^2+7xy+9y^2$, $Q=-x+8y$; 5.02 $P=3x^2+2xy$, $Q=5y^2-4y$;

5.03 $P=9x^2+5xy$, $Q=4y^2+7x-7y$;

5.04 $P=4x^2-8xy$, $Q=5y^2+5x-6y$;

5.05 $P=4x^2+3xy$, $Q=8y^2-8y$;

5.06 $P=2x^2+4xy-7y^2$, $Q=5x-4y$;

5.07 $P=8x^2+3xy$, $Q=3y^2-5x-4y+9$;

5.08 $P=7x^2+4xy+8y^2$, $Q=5y$;

5.09 $P=-3x^2+8xy$, $Q=9y^2+7x+6y$;

5.10 $P=4x^2+3xy-5y^2$, $Q=8x-7y$;

5.11 $P=5x^2+4xy$, $Q=3y^2-2y$;

5.12 $P=7x^2+8xy+9y^2$, $Q=3x-8y$;

5.13 $P=8x^2+9xy$, $Q=7y^2-5x-8y$;

5.14 $P=12x^2+5xy$, $Q=6y^2-4y$;

5.15 $P=7x^2+8xy$, $Q=8x-9y^2-7y$;

5.16 $P=9x^2+5xy$, $Q=3y^2-8x-6y$;

5.17 $P=13x^2+9xy$, $Q=-3y^2-8y$;

5.18 $P=9x^2+6xy+5y^2$, $Q=2x-2y$;

5.19 $P=-x^2+5xy+8y^2$, $Q=-6x+5y$;

5.20 $P=3x^2+9xy$, $Q=6y^2+2x-11y$;

5.21 $P=2x^2+7xy$, $Q=y^2+2x-4y$;

5.22 $P=6x^2+2xy+y^2$, $Q=2x-5y$;

5.23 $P=7x^2+2xy$, $Q=15y^2+8x-4y$;

5.24 $P=9x^2+3xy$, $Q=7y^2+2x$;

5.25 $P=3x^2+2xy+6y^2$, $Q=-5x-4y$;

5.26 $P=3x^2+2xy+2y^2$, $Q=8x+9y$;

9.27 $P=3x^2+2xy-y^2$, $Q=-7x-4y$;

5.28 $P=7xy+7y^2$, $Q=-9x-3y$;

5.29 $P=5x^2+4xy$, $Q=3y^2+11x-3y$;

5.30 $P=3x^2+6xy$, $Q=-7y^2+2x-4y$.

VI) Вычислить интегралы по поверхности S.

6.01 $\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

6.02 $\iint\limits_{(S)}(x+y-z)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $x+y/2+z/3=1$, расположенной во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

6.03 $I=\iint\limits_{(S)}(z+2x+4y/3)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $(x/2)+(y/3)+(z/4)=1$, лежащая в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

6.04 $I=\iint\limits_{(S)}(z+2x-4y/3)\,dS$, S: часть плоскости $(x/2)+(y/3)+(z/4)=1$, лежащая во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

6.05 $I=\iint\limits_{(S)}xyz\,dS$, S: верхняя поверхность плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

6.06 $I=\iint\limits_{(S)}\frac{xy}{z}\,dS$, S: верхняя поверхность плоскости $x+y+z=a$, расположенной во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

6.07 $I=\iint\limits_{(S)}x^2y^2z^2\,dx\,dy$, S: положительная сторона нижней половины сферы

$x^2+y^2+z^2=R^2$;

6.08 $I=\iint\limits_{(S)} x^2y^2z^2\,dx\,dy$, S: отрицательная сторона верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

6.09 $I=\iint\limits_{(S)} z^4\,dx\,dy$, S: внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

6.10 $I=\iint\limits_{(S)}\left(z^2-x^2-y^2\right)dx\,dy$, S: внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$;

6.11 $I=\iint\limits_{(S)} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, S: внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

6.12 $I=\iint\limits_{(S)} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, S: внутренняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

6.13 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте;

6.14 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной во втором октанте;

6.15 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в третьем октанте;

6.16 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz-x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в четвёртом октанте;

6.17 $I=\iint\limits_{(S)} -y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

6.18 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz-x^2y^2dx\,dz$, S: внутренняя сторона поверхности, расположенной во втором октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

6.19 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внутренняя сторона поверхности, расположенной во третьем октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

6.20 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внешняя сторона поверхности, расположенной во четвёртом октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

6.21 $I=\int\limits_{(L)} x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2+y^2=1$, $z=0$;

6.22 $I=\int\limits_{(L)} y^3\,dx+z\,dy+x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2+y^2=1$, $z=0$;

6.23 $I=\int\limits_{(L)} z\,dx+y^3\,dy+x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2-y^2=1$, $z=0$;

6.24 $I=\int\limits_{(L)} z\,dx-y^3\,dy-x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2-2x+y^2+2y=1$, $z=0$;

6.25 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в пятом октанте;

6.26 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^4dx\,dy+x^4z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в шестом октанте;

6.27 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в седьмом октанте;

6.28 $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в восьмом октанте;

6.29 $I=\iint\limits_{(S)}\left(z-2x+4y^2\right)dS$, S: часть плоскости $x+2y+3z=4$, лежащая в первом октанте;

6.30 $I=\iint\limits_{(S)}\left(z^2+3y+2x^3\right)dS$, S: часть плоскости $4x+3y+2z=10$, лежащая в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии изложены основные понятия двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов. Для закрепления теоретических знаний по двойным, тройным, криволинейным и поверхностным интегралам в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела математики “Математический анализ” курса “Математика” студенты должны уметь вычислять двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы, а также уметь использовать их в различных приложениях

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. - М.: “Наука”, 2000. - 445 с.
2. И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. математический анализ. Функции многих переменных. 2-е изд., пер. и доп. Учебник и практикум для академического бакалавриата - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 206 с.
3. В.В. Ивлев. Математический анализ. Функции многих переменных. - М.: “ИКАР”, 2013. - 548 с.
4. В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. - 336 с.
5. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. 1,2,3. - М.: Высшая школа, 1981. - 688 с., 584 с., 352 с.
6. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. Т. 1,2. - М.: Высшая школа, 1981. - 660 с., 357 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие